TÓPICO 1 - Introdução a Física e Conceitos matemáticos importantes

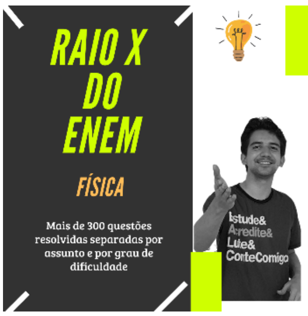
CAPÍTULO 4 - Vetores

ITALO VECTOR

Se você gostar desse material, por favor deixe um recado em nossas redes sociais e indique aos seus amigos; ou se puder, compartilhe em suas redes sociais, isso nos ajuda muito!

Conheça nossos outros recursos didáticos:

GUIA DO Sisu



CÉREBROS
CURSOS ON-LINE

Índice

1 – AS GRANDEZAS FÍSICAS

Vimos no – **Capítulo 01 - Introdução a Física e conceitos matemáticos importantes** – que grandeza física É tudo aquilo que pode ser medido, mensurado, utilizando-se um instrumento adequado; vimos também que elas podem ser grandezas primárias (que são obtidas de forma direta), ou secundárias (que são obtidas através de outras grandezas).

As grandezas também podem ser classificadas em grandezas escalares e vetoriais, conforme o esquema adiante:

Grandezas Físicas

Escalares

São as grandezas que para serem totalmente compreendidas precisam apenas de:

– Módulo (valor) + Unidade

Ex: massa, tempo, temperatura

Vetoriais

São as grandezas que para serem totalmente compreendidas precisam apenas de:

– Módulo (valor) + Unidade

– Direção

– Sentido

Ex: velocidade, força, aceleração

Vamos entender um pouquinho melhor sobre as grandezas vetoriais.

1.1 – AS GRANDEZAS VETORIAIS

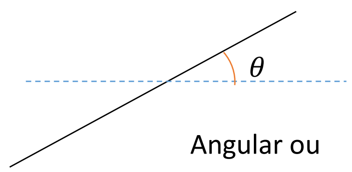
As grandezas vetoriais para serem perfeitamente compreendidas precisam de:

- Módulo (valor numérico) + Unidade;

- Direção
(linha geral)

Vertical

Horizontal



Angular ou Diagonal

- Sentido
(especificação)

cima (+)
Baixo (-)

Direita (+)
Esquerda (-)

Nordeste, Sudoeste, etc.

Veja os exemplos:

a) - 4 u

<u>Módulo:</u> 4 u (unidades)

<u>Direção:</u> Vertical

<u>Sentido:</u> Baixo

b) 3 u

<u>Módulo:</u> 3 u (unidades)

<u>Direção:</u> Horizontal

<u>Sentido</u>: Direita

c) 5 u

<u>Módulo:</u> 5 u (unidades)

<u>Direção:</u> Angular

<u>Sentido:</u> Nordeste

Obs.: Há uma convenção que estabelece que o módulo (valor) do vetor será positivo se o vetor estiver para cima ou para a direita (+) e negativo se estiver para baixo ou para a esquerda (-)

1.2 – VETORES

Os vetores são entidades matemáticas, que representam as grandezas vetoriais. É um segmento de reta orientado que traz consigo as informações inerentes as grandezas vetoriais (módulo, direção e sentido), conforme representado no exemplo acima letras a, b e c. Veja a Fig. 01 adiante:

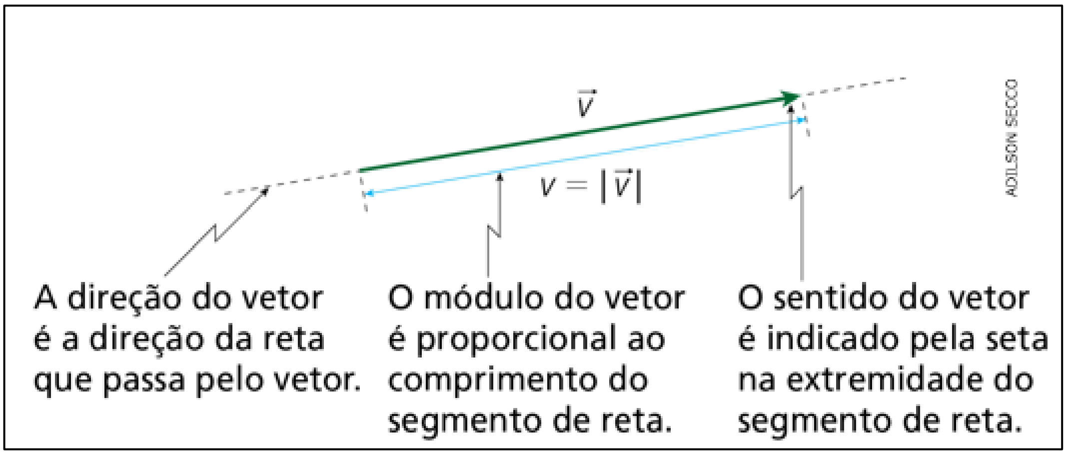


Fig.01 – Representação de um vetor

1.3 – OPERAÇÕES COM VETORES

- Soma entre vetores

Para se fazer a soma entre dois ou mais vetores não basta fazer a soma algébrica dos módulos dos vetores

Uma simples soma algébrica entre dois valores 2 + 3 = 5

Se quisermos somar 2 vetores cujos módulos são 2 u e 3 u retratados abaixo, será que a soma deles dará 5 u?

Sit.01

$\vec{A}$ = 2 u $\vec{B}$ = 3 u

Sit. 02

$\vec{A}$ = 2 u $\vec{B}$ = 3 u

Sit. 03

$\vec{A}$ = 2 u $\vec{B}$ = 3 u

Em todas as situações a soma resulta em 5 u? Vemos que não, é bem intuitivo que somente na sit. 01 teremos essa soma dos dois vetores resultando no mesmo valor de uma soma algébrica.

Portanto, como ilustrado acima, para se fazer a soma entre dois ou mais vetores não basta fazer a soma algébrica dos vetores. Como fazer? Veja na representação abaixo (Fig. 02)

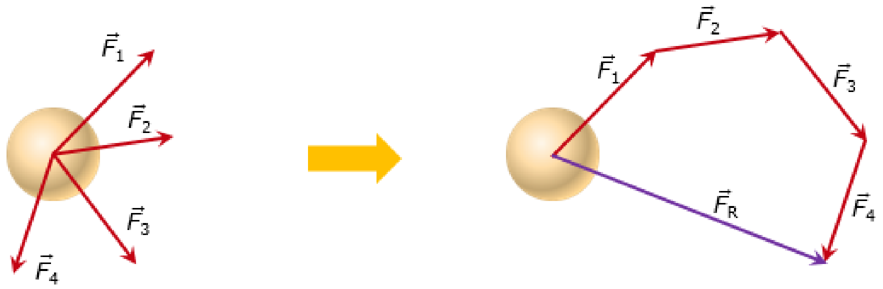


Fig. 02 – Exemplo de soma de vetores

Para entender melhor a soma entre dois vetores, iremos dividir a análise em algumas etapas:

Ângulo entre os vetores – Qual é o ângulo formado entre os dois vetores?
Os casos mais comuns são:

- 0º, 180º (mesma direção)
- 90º (ortogonais)
- 30º,45º,60º,120º,135º,150º (valores comuns de cosseno)

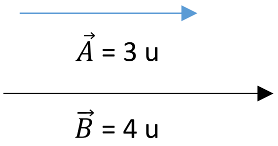
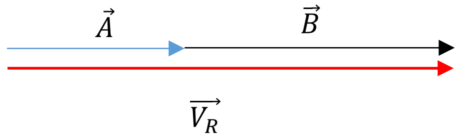
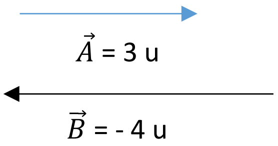
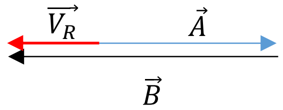
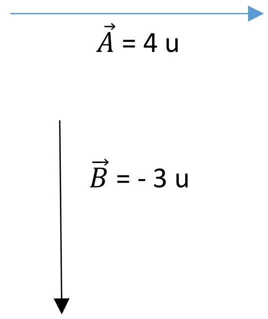
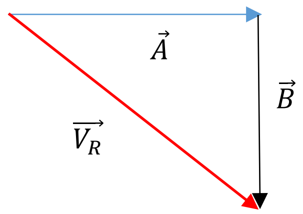
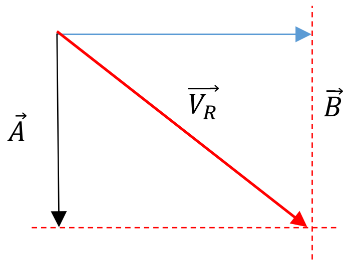
Vetor Resultante – É a representação da soma dos vetores, os dois vetores podem ser substituídos por apenas um vetor, que é chamado de vetor resultante ($\overrightarrow{V_R}$). É possível chegar na representação do vetor resultante usando a regra do polígono ou usando a regra do paralelogramo.

- Regra do polígono pode ser utilizada para qualquer quantidade de vetores
  É feita colocando a extremidade de um vetor na origem do próximo, a ponta de um vetor na cauda de outro, veremos como é isso na tabela adiante.

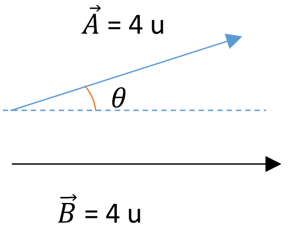
- Regra do paralelogramo pode ser utilizada apenas para dois vetores, com direções diferentes.
  É feita colocando a origem de um vetor com a origem do próximo, a cauda de um vetor com a cauda de outro, veremos como é isso na tabela adiante.

Módulo do Vetor Resultante – É o valor numérico que o vetor resultante assume, e não é simplesmente somar os dois módulos, é preciso entender que para cada ângulo, será calculado de uma forma diferente.

Veja a tabela adiante:

Ângulo entre os vetores	Vetor Resultante (Representação)	Módulo do Vetor Resultante (Valor)
0º  Mesma direção e mesmo sentido	$\vec{V_R} = \vec{A} + \vec{B}$ Usamos a Regra do Polígono (Ponta na cauda)  Essa é apenas a representação dos dois vetores, na extremidade de um vetor colocamos a origem do outro (regra do polígono)	Basta fazer a soma algébrica. $V_R = A + B$ Neste exemplo: $V_R = 3 + 4 = 7$ u
180º  Mesma direção e sentidos contrários, daí o módulo – 4, o sinal negativo indica apenas o sentido contrário.	$\vec{V_R} = \vec{A} + \vec{B}$ Usamos a Regra do Polígono (Ponta na cauda)  Essa é apenas a representação dos dois vetores, na extremidade de um vetor colocamos a origem do outro (regra do polígono)	Basta fazer a soma algébrica. $V_R = A + B$ Neste exemplo: $V_R = 3 + (-4)$ $V_R = 3 - 4$ $V_R = -1$ u Obs.: Vai virar uma subtração.
90º  Direções e sentidos diferentes.	$\vec{V_R} = \vec{A} + \vec{B}$ Podemos usar a Regra do Polígono (Ponta na cauda),  Essa é apenas a representação dos dois vetores, na extremidade de um vetor colocamos a origem do outro (regra do polígono). O vetor resultante parte da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor Ou também podemos usar a Regra do Paralelogramo (cauda com cauda)  Essa é apenas a representação dos dois vetores, na origem de um vetor colocamos a origem do outro (regra do paralelogramo). Traçamos as retas paralelas aos vetores --------------- O vetor resultante parte da origem dos vetores até o ponto de cruzamento entre as linhas paralelas aos vetores	Pela geometria da figura, como existe um ângulo de 90º, o triângulo será retângulo, portanto, É possível utilizar o Teorema de Pitágoras $V_R^2 = A^2 + B^2$ Neste exemplo: $V_R^2 = 4^2 + (-3)^2$ $V_R^2 = 16 + 9$ $V_R^2 = 25$ u $V_R = 5$ u Note que é possível representar os vetores de duas formas diferentes (regra do polígono ou regra do paralelogramo), mas o módulo será o mesmo.

OUTRO VALOR



O ângulo entre os vetores θ normalmente é: 30º, 45º ou 60º que são valores conhecidos.

Todavia, note que usando o ciclo trigonométrico:

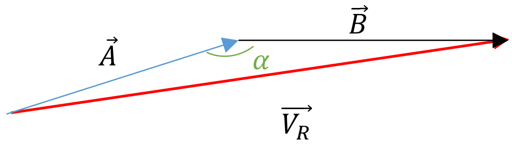
cos 60º = −cos 120º

cos 45º = −cos135º

cos 30º = −cos 150º

$\vec{V_R} = \vec{A} + \vec{B}$

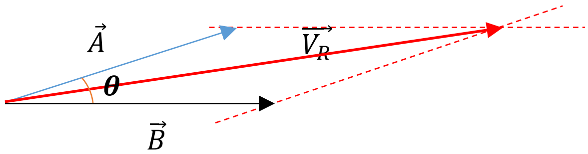
Podemos usar a Regra do Polígono (Ponta na cauda),



Essa é apenas a representação dos dois vetores, na extremidade de um vetor colocamos a origem do outro (regra do polígono).

O vetor resultante parte da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor

Ou também podemos usar a Regra do Paralelogramo (cauda com cauda)



Essa é apenas a representação dos dois vetores, na origem de um vetor colocamos a origem do outro (regra do paralelogramo)

Traçamos as retas paralelas aos vetores

O vetor resultante parte da origem dos vetores até o ponto de cruzamento entre as linhas paralelas aos vetores

NÃO é possível utilizar o Teorema de Pitágoras, pois não há ângulo reto (90º), por isso usaremos a LEI DOS COSSENOS

Caso 01 – O vetor resultante V_R é oposto ao ângulo dado α

$$V_R^2 = A^2 + B^2 - 2.A.B.\cos\alpha$$

(esse caso é mais comum quando usamos a regra do polígono, a lei dos cossenos fica com sinal negativo).

Caso 02 – O vetor resultante V_R está cortando o ângulo dado θ

$$V_R^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.\cos\theta$$

(esse caso é mais comum quando usamos a regra do paralelogramo, a lei dos cossenos fica com sinal positivo).

Neste exemplo θ = 60º:

$$V_R^2 = 4^2 + (4)^2 + 2.4.4.\cos 60$$
$$V_R^2 = 16 + 16 + 2.16.(1/2)$$
$$V_R^2 = 48$$
$$V_R = 4\sqrt{3}\ u$$

Música – Fixação da soma de vetores

Se o ângulo for 0, soma bem sincero,
Se o ângulo é 180, subtrai e não inventa,
Se o ângulo é 90, faz Pitágoras e arrebenta,
E se for outro valor, Lei dos Cossenos meu amor

- Subtração entre vetores

A subtração nada mais é que uma soma disfarçada, olhe só:

$$4 - 2 = 2$$

Isso pode ser reescrito como uma soma:

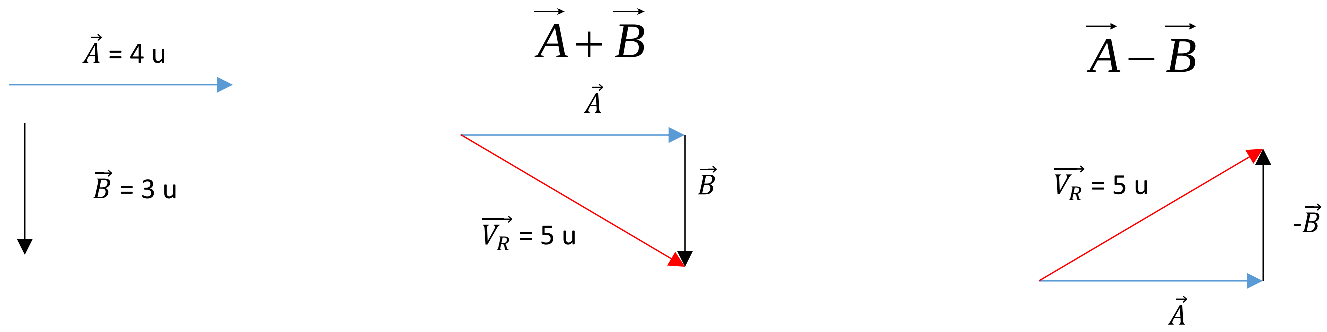
$$4 + (-2) = 2$$

Assim podemos pensar com os vetores

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

O sinal negativo indica apenas que o vetor $-\vec{B}$ possui mesmo módulo, mesma direção e <u>sentido contrário</u> ao vetor original $\vec{B}$.

Ex.



Note que o módulo do vetor resultante permanece o mesmo 5 u (que obtivemos usando a tabela acima, fazendo o teorema de Pitágoras, $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares) todavia a direção e o sentido do vetor resultante mudará.

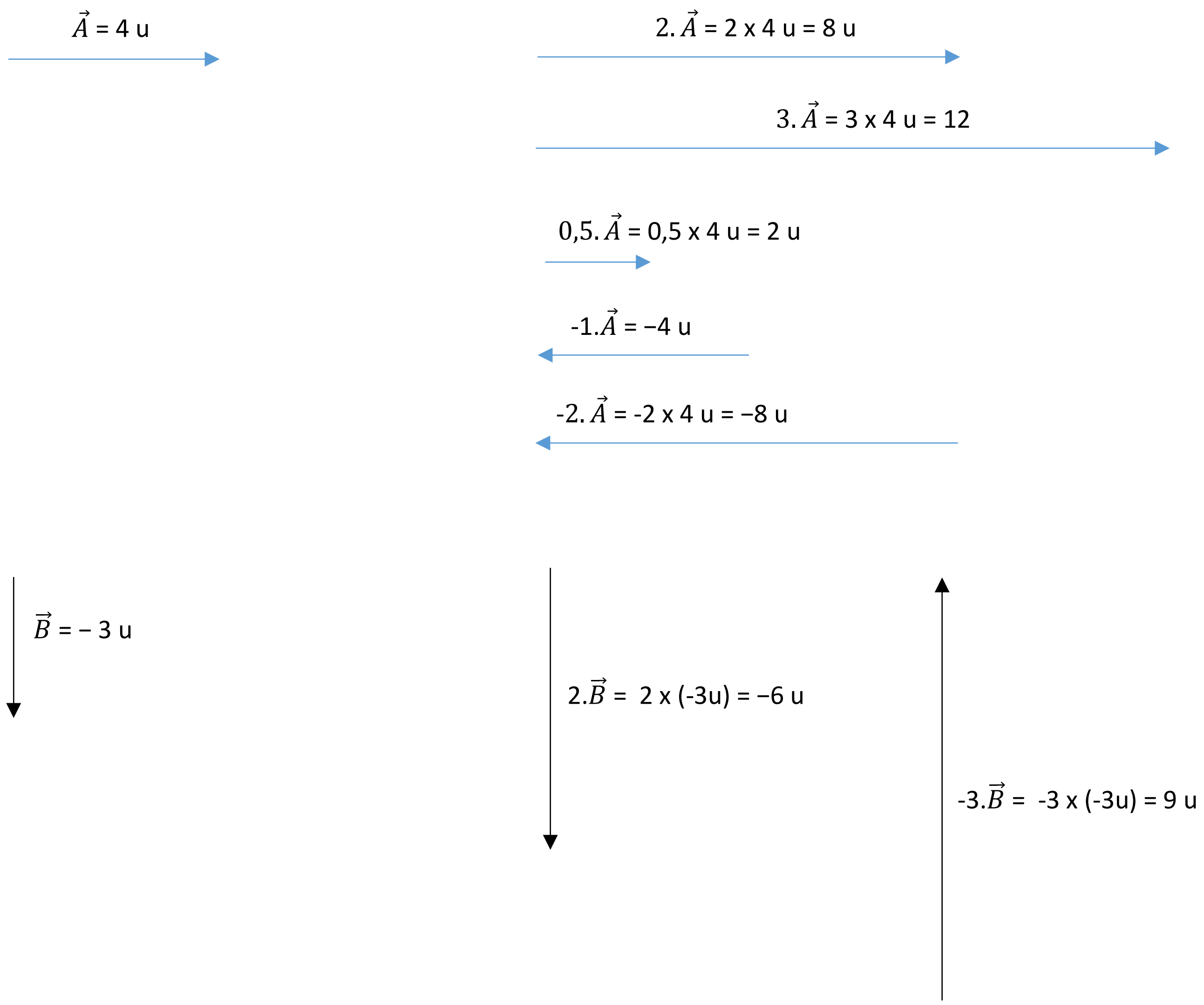
➢ Multiplicação por um número real (escalar)

Um vetor pode ser multiplicado por um número real, um número escalar...
Tal operação poderá alterar:

- Módulo (valor numérico), ou seja, o tamanho do vetor;
- Sentido, se for multiplicado por um número negativo.

<u>A multiplicação de um vetor nunca irá mudar a sua direção</u>

Ex.



➢ Decomposição de vetores

Todo vetor pode ser decomposto em dois vetores, conforme mostrado na Fig.

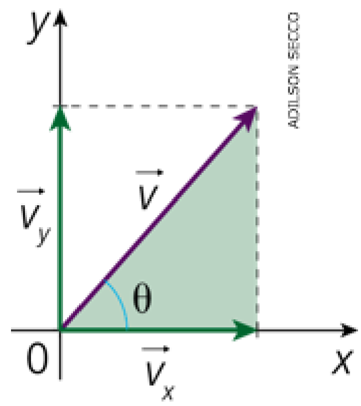


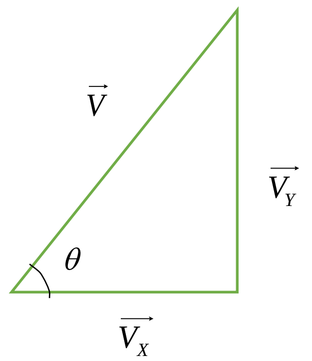
Fig. 03 – Decomposição de Vetores.

Perceba que é como se fosse uma regra do paralelogramo de forma inversa...

No paralelogramo usamos dois vetores para chegar em um vetor resultante; na decomposição, iremos achar as componentes do vetor.

$\vec{V}_x$ e $\vec{V}_Y$ são as componentes que formam o Vetor $\vec{V}$.

Para achar o valor das componentes usamos o ângulo θ e também as relações trigonométricas seno e cosseno.



Em relação ao ângulo θ:

$\vec{V}_Y$ é o cateto oposto

$\vec{V}_X$ é o cateto adjacente

$$\cos\theta = \frac{V_X}{V} \Rightarrow v_x = v \cdot \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{V_Y}{V} \Rightarrow v_y = v \cdot \text{sen}\,\theta$$

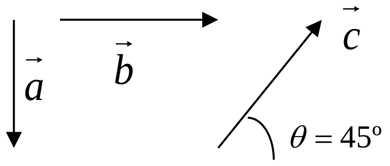
Relembrando os valores mais comuns de seno, cosseno e tangente

Função	**30º**	**45º**	**60º**
sen (θ)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos (θ)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg (θ)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3 – EXERCÍCIOS

➢ QUESTÕES DE FIXAÇÃO

Q1) Dados os vetores adiante,



Sabendo que os três são unitários, ou seja, o comprimento de cada um é 1 u. Represente os vetores resultantes abaixo.

a) $3 \times \vec{a}$

b) $-1 \times \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{b}$

d) $2.\vec{a} - \vec{b}$

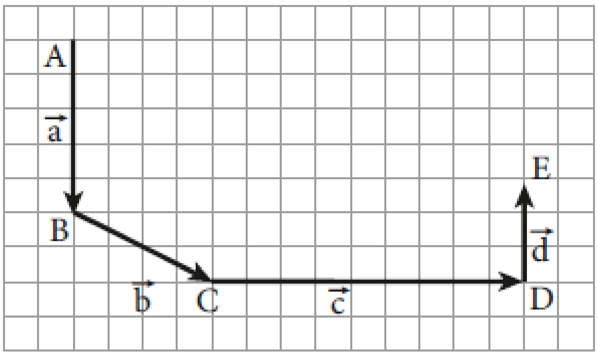
e) $\vec{a} + \vec{c}$

f) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

g) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

h) $\vec{b} + \vec{c}$

Q2) Se cada quadrado vale 1 cm, determine o módulo do vetor resultante.

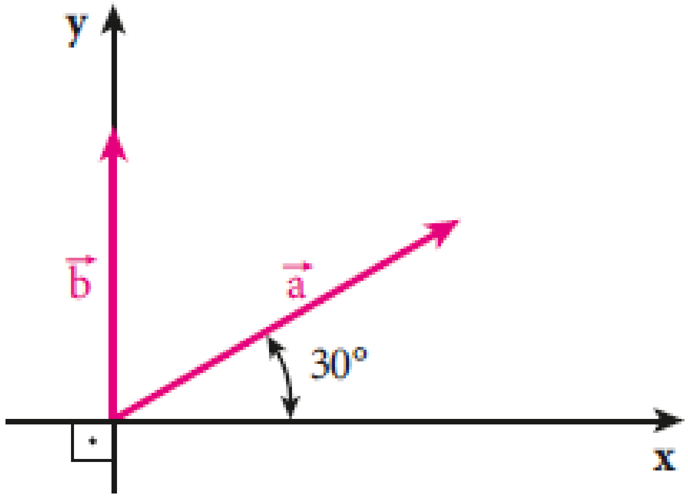


Q3) Três forças coplanares F1, F2 e F3, de intensidades respectivamente iguais a 10 N, 15 N e 20 N, estão aplicadas em uma partícula. Essas forças podem ter suas direções modificadas de modo que se alterem os ângulos entre elas. Determine para a resultante de F1, F2 e F3:

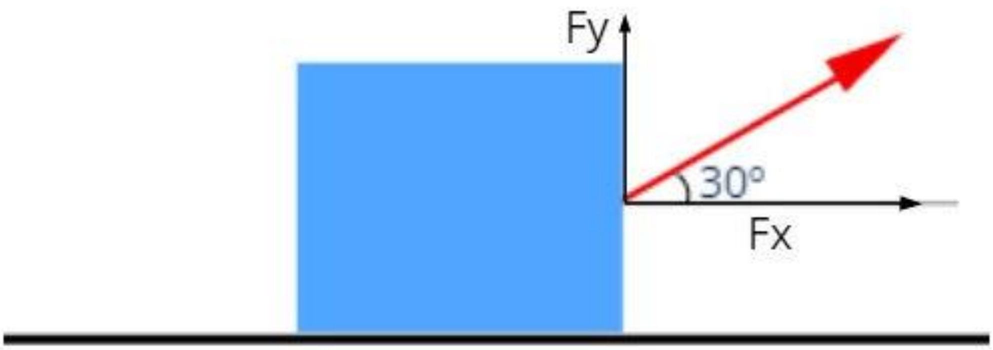
a) a intensidade máxima;

b) a intensidade mínima.

Q4) Os vetores a e b da figura ao lado têm módulos respectivamente iguais a 24 u e 21 u. Qual é o módulo do vetor-soma s = a + b?
Dado: sen 30° = 0,50; cos 60°= 0,50



Q5) Uma força de módulo igual a 10 N é aplicada sobre um corpo em um ângulo de 30º, como mostrado na figura a seguir. As componentes x e y dessa força são iguais a:



a) √2 N e 2 N, respectivamente.
b) √3 N e 5 N, respectivamente.
c) 5√3 N e 5 N, respectivamente.
d) 10√3 N e 5 N, respectivamente.
e) √3 N e 10 N, respectivamente.

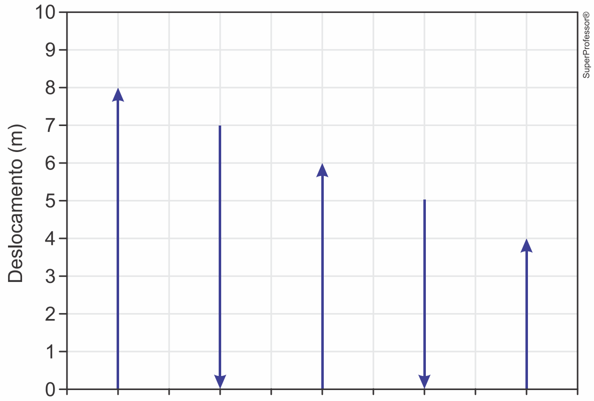
Q6) Um cabo puxa uma caixa com uma força de 30 N. Perpendicularmente a essa força, outro cabo exerce sobre a caixa uma força igual a 40 N. Determine a intensidade da força resultante sobre o bloco.
a) 50 N
b) 10√2 N
c) 70 N
d) 10 N
e) 20 N

Q7) A velocidade resultante de um barco que veleja em direção perpendicular à direção das águas de um rio é de 4 m/s. Sabendo que a velocidade das águas é de 8 m/s, o ângulo formado entre a velocidade do rio e a velocidade do barco são iguais a:

a) 180º
b) 90º
c) 45º
d) 60º
e) 30º

- QUESTÕES DE VESTIBULARES

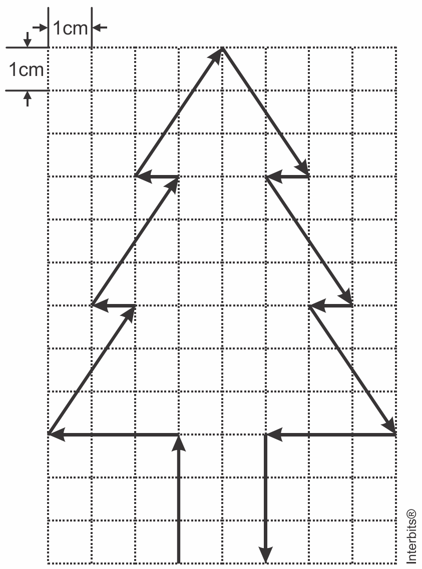
1. (Fuvest-Ete 2023) O quadro seguinte mostra um conjunto de vetores representando os deslocamentos verticais (direção y) de um corpo, em metros (m).



O deslocamento total do corpo seria correspondente a:

a) Um escalar de -6 m.
b) Um escalar de 6m.
c) Um vetor nulo.
d) Um vetor vertical para baixo de módulo 6 m.
e) Um vetor vertical para cima de módulo 6 m.

2. (Acafe 2015) Considere a árvore de natal de vetores, montada conforme a figura a seguir.

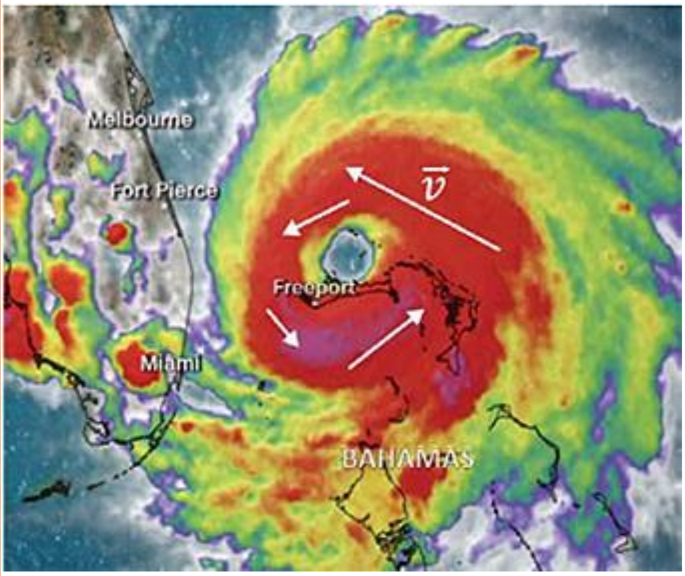


A alternativa **correta** que apresenta o módulo, em cm, do vetor resultante é:

a) 4
b) 0
c) 2
d) 6

3. (Ufpr 2011) Durante um passeio, uma pessoa fez o seguinte trajeto: partindo de um certo ponto, caminhou 3 km no sentido norte, em seguida 4 km para o oeste, depois 1 km no sentido norte novamente, e então caminhou 2 km no sentido oeste. Após esse percurso, a que distância a pessoa se encontra do ponto de onde iniciou o trajeto?

4. (Fuvest-Ete 2022) O furacão Dorian, em 2019, devastou a região do Caribe, movendo-se em velocidades de centenas de km/h. Na imagem em radar, estão representados, em escala, quatro vetores velocidade do vento.



Com base nessa informação, escolha o vetor que melhor indica a trajetória do furacão naquele momento.

a) 

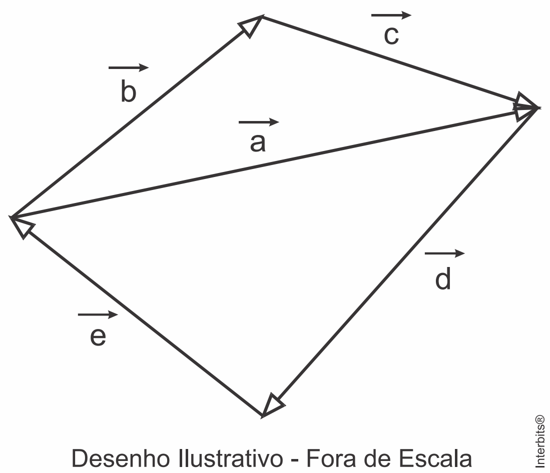
b) 

c) 

d) 

e) 

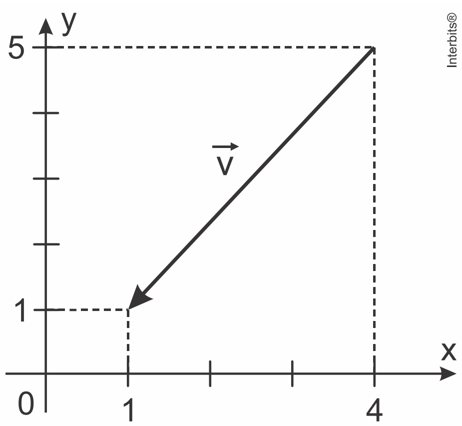
5. (Espcex (Aman) 2022) O desenho a seguir representa a disposição dos vetores deslocamento não nulos: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.



Podemos afirmar que, a partir do desenho, a relação vetorial correta, entre os vetores, é:

a) $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{e}$
b) $\vec{a} + \vec{d} = -\vec{b} - \vec{e}$
c) $\vec{e} + \vec{b} = -\vec{a} - \vec{d}$
d) $\vec{b} + \vec{d} = -\vec{e} - \vec{a}$
e) $\vec{b} + \vec{e} = -\vec{c} - \vec{d}$

6. (Upe 2015) A figura a seguir mostra o vetor $\vec{v}$ representado no plano cartesiano.



A representação e o módulo desse vetor são, respectivamente,

a) $\vec{v} = (5, 1)$ e $|\vec{v}| = 3$
b) $\vec{v} = (3, 0)$ e $|\vec{v}| = 3$
c) $\vec{v} = (-3, -4)$ e $|\vec{v}| = 4$
d) $\vec{v} = (-3, -4)$ e $|\vec{v}| = 5$
e) $\vec{v} = (-1, -4)$ e $|\vec{v}| = 5$

GABARITO DAS QUESTÕES DE VESTIBULARES:

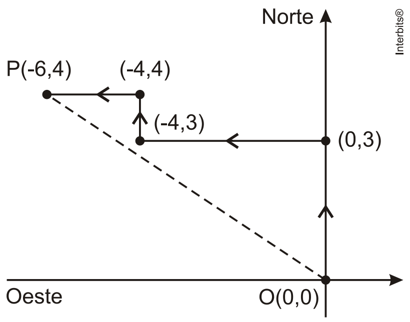
Resposta da questão 1: [E]
Módulo do vetor resultante:
$8 - 7 + 6 - 5 + 4 = 6$

Portanto, o deslocamento total do corpo corresponde a um vetor vertical para cima de módulo igual a 6 m.

Resposta da questão 2: [C]
A questão é puramente uma questão de vetores. Para resolvê-la, basta utilizar a regra do polígono, que diz que o vetor soma de n vetores consecutivos é dada pela união entre o início do primeiro vetor com o final do último.
Assim, pela figura, o módulo do vetor soma é 2 cm.

Resposta da questão 3:
1ª Solução:

Adotando convenientemente como ponto de partida a origem do plano cartesiano, segue que a distância pedida é o módulo do vetor cuja extremidade é o ponto $P(-6, 4)$, ou seja,
$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\text{ km}.$



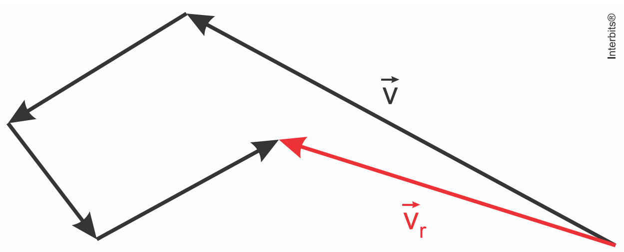
2ª Solução:

Considerando arbitrariamente o ponto de partida como sendo a origem O do plano cartesiano, queremos calcular a distância entre O e $P = (-6, 4)$. Portanto,
$d_{OP} = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\text{ km}.$

3ª Solução:

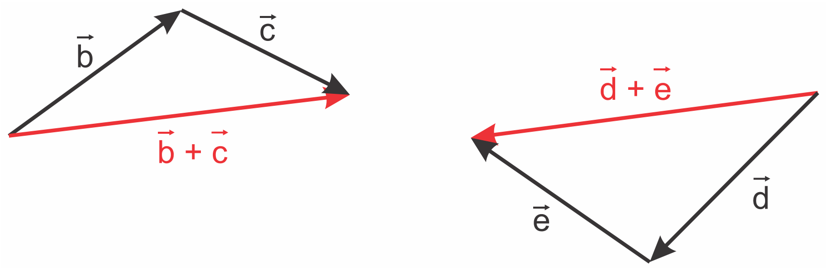
Supondo que o ponto onde a pessoa iniciou o trajeto seja a origem do plano de Argand-Gauss, segue que a distância pedida é o módulo do número complexo cujo afixo é o ponto $(-6, 4)$, isto é, $\sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\text{ km}.$

Resposta da questão 4: [B]
Reposicionando os vetores e utilizando a regra do polígono, obtemos o vetor resultante destacado na figura abaixo:

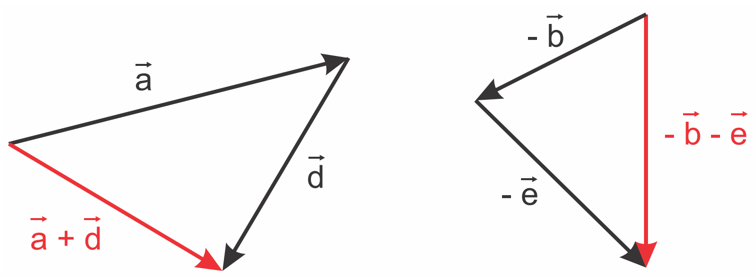


Resposta da questão 5: [E]
Analisando as afirmativas:

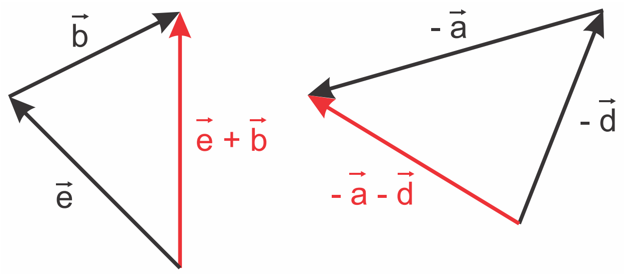
[A] Falsa.



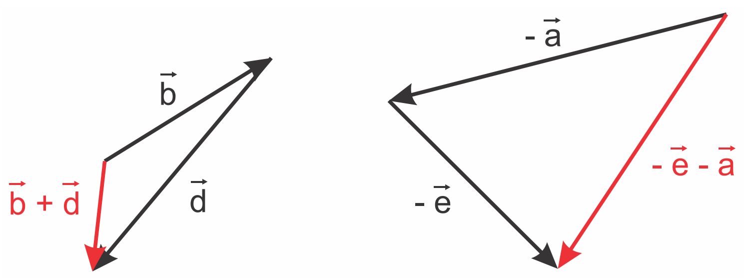
[B] Falsa.



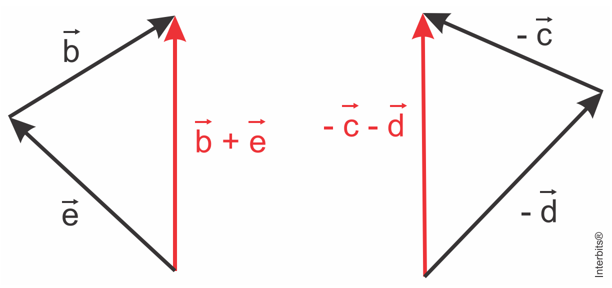
[C] Falsa.



[D] Falsa.



[E] Verdadeira.



Resposta da questão 6: [D]

Tem-se que $\vec{v} = (1, 1) - (4, 5) = (-3, -4).$ Portanto, segue $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$

4 – BIBLIOGRAFIA

[1] Ramalho, Nicolau e Toledo. Os Fundamentos da Física, Vol. 03, 9ª Ed. - Editora Moderna;

[2] Helou, Gualter e Newton. Tópicos de Física, Vol. 03, 18ª Ed. - Editora Saraiva.

[3] Nicolau, Torres e Penteado. Física – Veredas Digital - Vol. único, 1ª Ed. - Ed. Moderna